

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Ю. О. Давідіч
Я. В. Санько
Г. І. Фалецька

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

**«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА.
(ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ)»**

*(для студентів другого курсу всіх форм навчання
спеціальності 073 – Менеджмент)*

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2019

Давідіч Ю. О. Конспект лекцій з дисципліни «Вища та прикладна математика. (Дослідження операцій)» для студентів другого курсу всіх форм навчання спеціальності 073 – Менеджмент / Ю. О. Давідіч, Я. В. Санько, Г. І. Фалецька ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 51 с.

Автори: д-р техн. наук, проф. Ю. О. Давідіч
канд. техн. наук, доц. Я. В. Санько
канд. техн. наук, доц. Г. І. Фалецька

Рецензент д-р техн. наук, проф. В. К. Доля

Рекомендовано кафедрою транспортних систем і логістики,
протокол № 1 від 31.08 2016.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ТЕМА 1 ПРЕДМЕТ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ.....	6
ТЕМА 2 ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ.....	10
ТЕМА 3 ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ.....	15
ТЕМА 4 ЗАДАЧІ УПОРЯДКУВАННЯ ТА КООРДИНАЦІЇ. СІТЬОВЕ ПЛАНУВАННЯ.....	22
ТЕМА 5 ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ЗАМІНИ.....	36
ТЕМА 6 ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ...	43
ТЕМА 7 БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ В МЕНЕДЖМЕНТІ.....	47
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	51

ВСТУП

Дослідження операцій – комплексна наукова дисципліна, яка має важливе методологічне значення в системі підготовки сучасного економіста. В ній чітко реалізується ідея вивчення курсу вищої математики на факультеті менеджменту – ідея математичного моделювання економічних процесів.

Дисципліна дослідження операцій – займається розробкою та практичним застосуванням методів найбільш ефективного управління різними організаційними системами.

Об'єктом теорій дослідження операцій є організаційно-управлінські системи. До них відносяться: підприємства, об'єднання, установи матеріально-технічного постачання і торгівлі, НДІ та ВНЗ, міністерства, відомства, системи розподілу матеріальних, фінансових і трудових ресурсів, нинішнього і перспективного планування і таке інше.

Управління будь-якою системою реалізується як процес, підпорядкований визначеним закономірностям. Їх значення допомагає визначити умови, необхідні і достатні для здійснення даного процесу. Для цього всі параметри, що характеризують процес і зовнішні умови, повинні бути кількісно визначені, виміряні. Тобто, мета дослідження операцій – кількісне обґрунтування рішень, які приймаються з організації управління.

При вирішенні конкретної задачі управління, застосування методів дослідження операцій припускає:

- побудову економічних і математичних моделей для задач прийняття рішення у важких ситуаціях або в умовах невизначеності;
- вивчення взаємозв'язків, що визначають внаслідок прийняття рішень та встановлення критеріїв ефективності, дозволяючи оцінити перевагу того чи іншого варіанта дії.

Предметом вивчення дисципліни «Дослідження операцій» є моделі та методи системного аналізу, способи дослідження і оптимізація операцій.

Міждисциплінарні зв'язки: «Дослідження операцій» викладається після

вивчення студентами дисципліни «Вища математика», сприяє вивченню курсу «Економетрія», «Операційний менеджмент».

Основною метою викладання є формування в майбутніх менеджерів теоретичних знань і практичних навиків формалізації задач управління з використанням спеціальних оптимізаційних методів.

Основними задачами вивчення дисципліни є: надання студентам знань відносно суті етапів операцій; основних принципів і прийомів математичного моделювання операцій; принципів підбору математичного і програмного забезпечення практичної реалізації задач; а також формування в студентів вміння:

- постановка і рішення організаційних задач з використанням математичного апарату;
- вирішення задачі оптимального розподілу ресурсів;
- вирішення оптимізаційної задачі управління ресурсами масового обслуговування, упорядкування й координації;
- будувати й оптимізувати сітчаті моделі;
- вирішувати задачі з умовами невизначеності й конфлікту;
- використовувати методики багатокритеріальної оптимізації управлінських рішень;
- використовувати прикладні програми при проведенні обчислень на ПЕВМ і зрівняння можливих альтернатив;
- проводити післяоптимізаційний аналіз і розробку практичних рекомендацій для прийняття рішень.

ТЕМА 1 ПРЕДМЕТ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Для розкриття цього питання треба засвоїти основні поняття і визначення дослідження операцій.

Операція –це будь-який керований захід, спрямований на досягнення мети. Результат операції залежить від способу її проведення, організації, тобто від вибору деяких параметрів. У широкому сенсі операція – це сукупність дій(заходів) для досягнення мети.

Всякий визначений вибір параметрів називається рішенням. Оптимальними вважають ті рішення, які по тим чи іншим міркуванням віддають перевагу іншим. Тому, основною задачею дослідження операцій є передчасне кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

Система – це цілісна численність об'єктів (елементів), пов'язаних взаємними відношеннями. Таким чином, система – це складна єдність, в якій можуть бути виділені складові частини – елементи, зв'язки або відношення між елементами і середовищем. Системи, до складу яких входять люди, називаються організаційними.

Системи діляться на статистичні (з одним становищем) та динамічні (безліч становищ). Вважається, що численність елементів системи може бути надійною структурою. Структура – це мережа зв'язків або відношень між складовими частинами системи.

Спрямоване вимірювання структури в співвідношенні до цілей, впливаючи з інтересів, називається організацією системи. Структура характеризує систему в стані спокою статички, а організація – в динаміці. Знімок організації системи для кожного даного моменту часу є її структура.

Поняття «Мета» в «дослідженні операцій» – центральне. Звичним у відношенні до «Мети» вважається сукупність суспільних та особистих потреб членів суспільства. Потреба є несумісністю між бажаним і дійсним станом системи, станом напруження або нерівноваги в оточенні і в самій системі.

Напруження породжує прагнення до дії, спрямовані на відновлення рівноваги, тобто, на задоволення потреб. Потреби породжують інтереси.

Інтереси безліч можливих станів, серед яких знаходяться рівноважні. Мета визначає бажаний стан системи або бажаний результат її поведінки.

Наряду з поняттям мети ми будемо користуватися поняттям критерій або цільова функція (функціональні цілі). Критерій – це правило, за яким обираються засоби досягнення мети. Якщо мета вказує на бажаний стан системи, направлення дій в області інтересів, то критерій – це ефективний спосіб її досягнення. Критерій дозволяє обирати засоби досягнення мети та відповідає на питання: якою ціною вона може бути досягнута?

Поряд з «метою» і «задачею» ми будемо користуватися поняттям «проблема» – потенціальна мета, для якої не знайдені альтернативні способи її досягнення. Проблем в будь-якій області діяльності більше, аніж може бути поставлено цілей і задач. Якщо «мета» – бажаний стан системи, то «проблема» є несумісність між бажаним і дійсним. Виявлення проблеми – важливий етап процесу прийняття рішень.

Будь-яка діяльність людей переслідує визначену мету. Саму діяльність назовемо операцією. При її виконанні можуть брати участь різні ресурси: предмети і засоби праці, виробництва, матеріали, енергія, транспорт, грошові засоби, час, і самі учасники – люди. Якщо в операції беруть участь колективи, то для впорядкування їх дій необхідний якийсь орган керівництва. Представлення керівницького органу у ході операції до її початку є задум. Деталізований задум, конкретизованими критеріями і розподільними ресурсами, представляють собою план операції. Мета операції – бажаний стан об'єкту після перетворення його сукупністю дій або бажаний результат діяльності. Досягнення мети пов'язане з затратами.

Мірою ефективності досягнення мети служить критерій ефективності. Для реалізації мети найбільш ефективним шляхом треба управляти сукупністю дій. Керівна дія, або управління – поняття багатозначне. Під управлінням будемо розуміти будь-який вплив на об'єкт з метою збереження його

стійкості(організації) або переводу системи з одного стану в інший у відповідності з метою управління, виробленою в самій системі або заданій ззовні.

Поняття «управління» будемо розуміти в широкому та вузькому сенсі слова. Управління в широкому сенсі передбачає прогнозування та планування економічних процесів; у вузькому – сукупність впливів, спрямованих на реалізацію системи бізнес-плану.

Системний підхід – наукова основа обґрунтування і прийняття рішень в економіці. Системний підхід має на увазі облік факторів, які впливають на рішення задачі, взаємодію системи з навколишнім середовищем.

Системний підхід, як основний метод аналізу і синтезу оптимальних рішень в економіці, реалізується за допомогою математичного моделювання. Моделі аналізу і синтезу служать відображеними прообразами реальних систем, процесів, явищ, і т. д. Вони мають форму функцій, рівнянь, нерівностей, упорядкованого набору чисел і ін. Системний підхід представляє собою сукупність методологічних принципів та теоретичних положень, які дозволяють розглядати кожен елемент системи в його зв'язку і взаємодії з іншими.

Одним з основних понять прийняття рішень є поняття моделі системи, процесу або операції. Модель – деяке відображення оригіналу. Коли архітектор замість справжнього будинку будує його макет – це вже модель. Модель будинку може бути представлена у вигляді макету, кресленнях або колонах цифр і формул, за якими можна судити про особливості будинку. Менш звичне уявлення про те, що фотознімок пейзажу, географічна карта – це модель місцевості. І, мабуть, новим для багатьох є те, що знайома зі шкільних літ формула шляху $S = V \cdot t$ – математична модель. Під моделлю будемо розуміти умовний образ будь-якого об'єкту, який приблизно відтворює цей об'єкт за допомогою деякої мови. В економіко-математичних моделях таким об'єктом є економічний процес (наприклад, використання ресурсів, розподіл виробів між

різними типами устаткування і т. ін.), а мовою – класичні і спеціально розроблені математичні методи.

Ступінь відповідності кількості елементів моделі кількості елементів оригіналу, зв'язків і відношень може бути різною. Можна говорити про те, що одна модель більше відповідає оригіналу, чим інша, тобто про адекватність моделі оригіналу.

Процес побудови моделі в тому чи іншому ступені, який відповідає оригіналу, називають моделюванням.

Економіко-математична модель – математичний опис економічного об'єкту, чи процесу. Ця модель виражає закономірності економічного процесу в абстрактному виді за допомогою математичних відношень. Використання математичного моделювання в економіці дозволяє поглибити кількісний економічний аналіз, розширити область економічної інформації, ідентифікувати економічні обчислення.

Для застосування кількісних методів дослідження треба побудувати математичну модель операції. При побудові моделі операції, як правило, спрощується, схематизується і схема операції описується за допомогою того чи іншого математичного апарату. Модель операції – це достатньо точний опис операції за допомогою математичного апарату (різноманітних функцій, рівнянь, систем рівнянь і нерівностей і ін. Складання моделі операцій вимагає розуміння сутності явища, яке описує та знання математичного апарату.

Ефективність операції – ступінь її пристосування до виконання задачі – кількісно виражається у вигляді критерію ефективності – цільової функції. Наприклад, у задачі про використання ресурсів-критеріїв ефективності, прибуток від реалізації виробленої продукції, яку треба максимізувати, у транспортній задачі – сумарні витрати на перевозку вантажів від поставщиків до споживачів які треба мінімізувати. Вибір критерію ефективності визначає практичну цінність дослідження. Неправильно вибраний критерій може принести шкоду. Достатньо згадати «вал», який приводив до невиправданих затрат.

Існують наступні типові моделі дослідження операцій:

- 1) розподілу;
- 2) управління запасами;
- 3) масового обслуговування;
- 4) упорядкування;
- 5) вибору маршруту;
- 6) заміни;
- 7) пошуку;
- 8) конфліктних ситуацій;
- 9) змішаного типу та ін.

Всі ці задачі докладно будемо розглядати в наступних темах і на практичних заняттях.

Успіх та ефективність дослідження операцій забезпечуються лише в тому випадку, якщо усвідомлена структура дослідження, коли вона реалізується практично, постійно становиться краще в методологічному і математичному відношеннях. Тому виникає необхідність скласти визначену схему, яка установлює найбільш доцільну послідовність дій, спрямованих на досягнення мети, тобто виникає задача виробу типового технологічного процесу, дослідження операцій.

Таким чином, ми розглянули й друге питання «Економіко-математичні моделі та методи».

І на закінчення слід відмітити, що тут ми висловили основні поняття дисципліни «Дослідження операцій», розкрили сутність економіко-математичної моделі та моделювання.

ТЕМА 2 ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

Основна проблема, що виникає при розв'язанні задачі управління запасами, полягає в створенні ефективної і надійної системи управління рівнем наявних запасів. Відповідно до функцій, що реалізуються в системі управління

запасами, її структуру зручно розглядати як трирівневу ієрархічну систему, кожен з рівнів якої розв'язує свої завдання.

На третьому (нижньому) рівні здійснюється опрацювання, ведення обліку і збереження інформації про запаси. Основною інформацією, необхідною для успішного функціонування системи управління запасами, є рівень наявних запасів і запасів, що будуть створені за рахунок розміщення замовлень, а також накопичення за замовленнями споживачів (якщо є попередні замовлення). Крім того, облік інформації щодо будь-якої наявної в запасах продукції включає такі показники, як її вартість, час випередження, одиниця виміру; джерело одержання й ін. Таким чином, обсяг оперативної облікової інформації є істотним, і значне підвищення ефективності опрацювання інформації досягається шляхом побудови та використання відповідних комп'ютерних інформаційних систем. Оперативний цикл третього рівня системи зазвичай становить день.

Завданням другого (середнього) рівня є розроблення та застосування правил ухвалення рішень, на ґрунті яких установлюються терміни і розміри замовлень, необхідних для поповнення запасів. Кожне правило прийняття рішень є результатом вирішення деякої часткової задачі оптимізації управління запасами. Задачі, що доводиться вирішувати користувачу в практичних умовах, є різними, тому що конкретні системи мають різні параметри. Тому досліднику систем необхідно знати умови, за яких одне правило прийняття рішень виявляється кращим за інше. Формально ці рішення є оптимальними, проте для успішного застосування необхідно враховувати реальні умови та досвід персоналу, оскільки не завжди виправданим є уявлення про «єдино правильне» рішення. Оперативний цикл середнього рівня системи становить місяць. В цьому випадку слід особливу увагу звернути на достовірність облікових даних, тому що навіть найкраща модель не може генерувати оптимальні чи навіть прийнятні рішення за умови відсутності достовірної первинної інформації.

Перший (вищий) рівень дозволяє на основі розроблених правил прийняття рішень побудувати модель системи управління і відповідно до цієї

моделі визначити стратегію функціонування (зазвичай горизонт планування в цьому випадку є квартал або рік). Поточний контроль за виконанням плану дає можливість органам управління вирішувати питання про доцільність втручання у функціонування системи, і якщо так, то яким чином і коли необхідно здійснювати управління системою загалом, а не запасами конкретної продукції.

Існують дві точки зору щодо необхідності створення запасів. Згідно з однією з них, наявність запасів дозволяє швидко задовольняти запити споживачів; згідно з іншою, наявність запасів дозволяє постачальнику нейтралізувати коливання попиту в умовах рівномірного виробництва продукції.

У системі управління запасами, що орієнтована на споживача, рішення про збільшення розміру запасу, звичайно, приймається з урахуванням кількості замовлень на ту чи іншу продукцію. Якщо протягом часу T на деяку продукцію надійшло принаймні N заявок, то створюється запас цієї продукції. При такій стратегії органи управління, відповідальні за сферу збуту, можуть скласти таблицю рішень, що передбачають витрати при заданих значеннях (N, T) шляхом класифікації запасів. Існує продукція визначеного типу (запасні частини для нового обладнання й основні запаси для виробництва нової продукції), для яких доцільно мати запас до надходження перших замовлень.

Оскільки дохід від реалізації наявної в запасі продукції протягом тривалого часу може бути лише частково оцінений у грошовому вираженні (і подібна оцінка, як правило, є дуже суб'єктивною), то, очевидно, не має сенсу розробляти складні моделі системи управління запасами з урахуванням витрат на збереження додаткового обсягу продукції. Органи управління, що приймають рішення, повинні мати уявлення про економічний ефект прийнятого рішення, однак модель, що використовується для такого прогнозу, може бути гранично простою і враховувати планований обсяг інвестицій у товарно-матеріальні запаси, розміри складських приміщень, а також витрати на функціонування першого рівня системи управління (системи обліку).

У системі управління запасами, що орієнтована на постачальника, існує реальна економічна основа для ухвалення рішення щодо того, організовувати власний випуск певної продукції чи закуповувати її на стороні, якщо вона користується попитом.

Моделювання систем управління запасами приводить до необхідності розроблення підходів до розв'язання задачі економічно доцільного розміщення продукції на складах розподільної мережі.

Таким чином, задача управління запасами виникає, коли необхідно створити запас матеріальних ресурсів або предметів споживання з метою задоволення попиту на певному заданому інтервалі часу (скінченому або нескінченому). Для забезпечення неперервного і ефективного функціонування практично будь-якої організації необхідне створення запасів. В будь-якій задачі управління запасами потрібно визначати кількість замовленої продукції і строки розміщення замовлень. Попит можна задовольнити шляхом одноразового створення запасу на весь потрібний період часу або шляхом створення запасу для кожної одиниці часу цього періоду. Ці два випадки відповідають залишковому запасу (стосовно одиниці часу) і недостатньому запасу (стосовно повного періоду часу).

При залишковому запасі потрібні вищі виділені (стосовно одиниці часу): капітальні вкладення, але дефіцит виникає рідше і частота розміщення замовлень менша. З іншого боку, при недостатньому запасі виділені капітальні вкладення зменшуються, але частота розміщення замовлень і загроза дефіциту зростає. Для будь-якого з вказаних крайніх випадків характерні значні економічні втрати. Таким чином, рішення щодо розміру замовлення і моменту його розміщення можуть базуватися на мінімізації відповідної функції загальних затрат, що обумовлені втратами від залишкового запасу і дефіциту.

Довільна модель управління запасами остаточно повинна дати відповідь на два запитання: Яку кількість продукції замовляти? Коли замовляти?

Відповідь на перше питання відображається через розмір замовлення, що визначає оптимальну кількість ресурсів, яку необхідно постачати кожен раз,

коли відбувається розміщення замовлення. В залежності від ситуації розмір замовлення може змінюватися з часом.

Відповідь на друге питання залежить від типу системи управління запасами. Якщо система передбачає періодичний контроль стану запасу через рівні проміжки часу (наприклад, кожної неділі або кожного місяця), момент надходження нового замовлення, зазвичай, співпадає з початком кожного інтервалу часу. Якщо ж у системі передбачений неперервний контроль стану запасу, точка замовлення зазвичай визначається рівнем запасу, при якому необхідно розміщувати нове замовлення.

Таким чином, розв'язання узагальненої задачі управління запасами визначається наступним:

У випадку періодичного контролю стану запасу потрібно забезпечувати надходження нової кількості ресурсів об'ємом в розмір замовлення через рівні проміжки часу.

У випадку неперервного контролю стану запасу необхідно розміщувати нове замовлення розміром в об'єм запасу, коли його рівень досягає точки замовлення.

Розмір і точка замовлення зазвичай визначаються з умов мінімізації сумарних витрат системи управління запасами, які можна представити у вигляді функції цих двох змінних. Сумарні витрати системи управління запасами відображаються у вигляді функції їх основних компонент наступним чином :

$$\left[\begin{array}{c} \text{Сумарні} \\ \text{витрати} \\ \text{системи} \\ \text{управління} \\ \text{запасами} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Витрати} \\ \text{на} \\ \text{придбання} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Витрати на} \\ \text{оформлення} \\ \text{замовлення} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Витрати на} \\ \text{зберігання} \\ \text{замовлення} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Втрати} \\ \text{від} \\ \text{дефіциту} \end{array} \right]$$

Рисунок 2.1 – Схема витрат

Витрати на придбання стають важливим фактором, коли ціна одиниці продукції залежить від розміру замовлення, що, зазвичай, відображається в виді гуртових знижок у тих випадках, коли ціна одиниці продукції зменшується зі збільшенням розміру замовлення.

Витрати на оформлення замовлення – це постійні витрати, що пов'язані з його розміщенням. Таким чином, при задоволенні попиту протягом заданого періоду часу шляхом розміщення менших замовлень (частіше) витрати збільшуються порівняно з випадком, коли попит задовольняється розміщенням більших замовлень (і, відповідно, рідше).

Витрати на зберігання запасу – це витрати на зберігання запасу на складі (наприклад, процент на інвестований капітал, витрати на переробку, амортизаційні витрати і експлуатаційні витрати), зазвичай збільшуються з зростанням рівня запасу.

Втрати від дефіциту є витрати, що обумовлені відсутністю запасу необхідної продукції. Зазвичай вони пов'язані з погіршенням репутації постачальника у споживача і з потенційними втратами.

ТЕМА 3 ЗАДАЧІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Теорія масового обслуговування (ТМО) – це розділ дослідження операцій, який розглядає різноманітні процеси в економіці, а також у телефонному зв'язку, охороні здоров'я та інших галузях, як процеси обслуговування, тобто задоволення різних замовлень (наприклад, обслуговування кораблів у порту, їх розвантаження та завантаження, обслуговування клієнта в пральній і т. інше). При всій різноманітності ці процеси мають спільні риси: вимоги на обслуговування не постійно (випадково) поступають на «канал обслуговування» (місце біля причалу, вікно в роздавальному приміщенні) і, в залежності від його зайнятості, тривалості обслуговування та інших факторів, утворюють чергу вимог. ТМО вивчає статистичні закономірності надходження вимог і на цій основі розробляє

рішення, тобто такі характеристики системи обслуговування, при яких витрати часу на очікування в черзі, з одного боку, і на застій – з іншого, були б найменшими. Систему виробництва і споживання товарів можна трактувати як систему масового обслуговування, де зустрічаються люди (клієнти) і товари. Деякі вчені роблять із цього досить широкі висновки. Вони схильні розглядати суму витрат часу на очікування в чергах і на застій каналів обслуговування (зберігання товарів на складах) як міру ефективності економічної системи, яку вивчаємо: чим менші витрати, тим вища ефективність.

Треба сказати і про терміни «ТМО» та «теорія черг». У багатьох роботах вони трактуються як рівноправні, в інших – теорію черг розглядають тільки як розділ ТМО, оскільки вивчаються системи не тільки з чергами, а й з відмовами (наприклад, коли телефонна лінія зайнята, черга абонентів не звертається), а також деякі інші.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, які пов'язують задані умови праці систем масового обслуговування (СМО) із показниками ефективності СМО, які описують їх здатність справлятися з потоком заяв.

В якості показника обслуговування СМО використовуються: середня кількість заяв, які обслуговуються в одиницю часу; середня кількість заяв у черзі; середній час очікування обслуговування; імовірність відмови в обслуговуванні без очікування; можливість того, що кількість заяв у черзі перевищить певне значення і т.д.

Середні величини в СМО розуміються як математичні очікування відповідних випадкових величин.

Під вимогою на обслуговування часто розуміють потребу в обслуговуванні, яка надходить від об'єкта (клієнта), а також сам об'єкт, незалежно від його природи. Обслуговування – це процес виконання роботи із задоволення вимог, що надійшли. Технічні пристрої, персонал або засоби будь-якого іншого походження, які виконують функції обслуговування, називаються каналами обслуговування.

1. Поняття про системи масового обслуговування та загальна характеристика завдань, які вирішуються.

Необхідність підвищення ефективності суспільного виробництва зумовлює постановку та вирішення все більш важливих та складних завдань. У кінцевому результаті це потребує поглиблення раніше розроблених методів дослідження й створення нових технічних, технологічних, економічних та математичних теорій. Нові методи кількісного аналізу перевіряються практикою, тим, що має місце в дійсності.

Теорія масового обслуговування (ТМО) представляє собою частину нового наукового напрямку теорії ймовірностей, що виділилась й оформилась у самостійну наукову дисципліну завдяки специфіці вживаного математичного апарату та важливості практичних завдань, які вирішуються.

Початок розробки практичних завдань масового обслуговування поклав фахівець копенгагенської телефонної компанії датський математик А.К.Ерланг (1878–1929рр.) в період між 1908 та 1922 роками. У 1909р. з'явилась його робота «Теорія ймовірностей і телефонні переговори» та інші публікації, в яких були сформульовані перші прикладні задачі телефонії. Ці задачі були пов'язані із необхідністю впорядкувати роботу телефонної мережі та розробити методи оцінювання якості обслуговування споживачів в залежності від кількості пристроїв, що використовуються.

Узагальнення методів вирішення різноманітних завдань та розробка спільної ТМО пов'язані із ім'ям радянського математика А. Я. Хинчина. В його книзі «Математичні методи теорії масового обслуговування» вперше були сформульовані спільні ідеї та методи теорії. Подальший розвиток ТМО пов'язаний з ім'ям іншого радянського математика Б. В. Гнеденко та його учнів А. М. Колмогорова, Н. Б. Бусленка та ін., із закордонних авторів відомі: Д. Кендалл, Ф. Паллачек, Л. Токач та ін.

Спільною особливістю завдань із застосуванням ТМО є випадковий характер процесів, що використовуються. Однією із типових життєвих ситуацій слід вважати утворення черг при задоволенні яких-небудь потреб, що

приводить до втрат робочого часу й невиробничій витраті різних ресурсів. У всіх галузях діяльності людини мають місце процеси, які носять характер масового обслуговування:

- побутове обслуговування – це надання послуг покупцям у крамницях, ремонт різних побутових предметів у майстернях, телефонні переговори, надання медичної допомоги за всіма видами, пожежне обслуговування і т. інше;
- у військовій справі – обстріл літаків, катерів та інших видів бойової техніки противника;
- у виробництві – транспортне та ремонтне обслуговування, організація постачання.

Типовим прикладом задачі МО в житлово-комунальному господарстві є експлуатація одним робітником (сантехніком, електриком) групи об'єктів (будинків, під'їздів, квартир). Якщо за робітником закріплено недостатньо об'єктів, то в моменти їх справності – простоє, якщо багато – він не зможе їх своєчасно обслужити. Аналогічна ситуація виникає, якщо декілька об'єктів (N) обслуговуються декількома робітниками (R).

Теорія масового обслуговування вивчає закономірності протікання процесів, пов'язаних з масовим обслуговуванням, розробкою кількісних методів пошуку таких об'єктивних характеристик, які забезпечують своєчасне задоволення потреб, що надходять за рахунок раціональної організації робіт.

У вітчизняній та зарубіжній літературі ТМО називають по-різному: теорією лінії очікування, чергою утворення груп та ін. Ця наукова дисципліна займається описом, аналізом та дослідженням різних за своїм змістом явищ з метою виявлення і створення необхідних передумов для їх якісного функціонування. При цьому під якістю обслуговування розуміється не те, як добре виконана робота (ремонт, своєчасність обслуговування та ін.), а на скільки вона своєчасно виконана, чи не утворюються вимоги, які ще не обслужені. У загальному вигляді черга на обслуговування може виникати, якщо на процес, що досліджується, покладені наступні обмеження:

- обмежена кількість чи недостатня продуктивність обслуговуючих апаратів;

- нерегулярне надходження вимог;

- зміна (варіювання) тривалості обслуговування.

Завдяки різній організації виробництва й праці, коли вимоги на обслуговування надходять рівномірно, протягом рівних проміжків часу й вони також обслуговуються, ніяких завдань масового обслуговування (ЗМО) не виникає.

2. Прийнята термінологія та класифікація систем масового обслуговування.

Складовими елементами систем масового обслуговування (СМО) є:

- вхідний потік вимог та заяв, які представляють собою запити на задоволення будь-якої потреби (під потоком розуміється послідовність подій);

- вихідний потік вимог (обслужені чи ні), які покидають обслуговуючу систему (для іншої системи може бути вхідний);

- обслуговуючі апарати, які об'єднуються в аналогічну систему (технічні засоби, люди та різноманітні пристрої, люди та різноманітні засоби, за допомогою яких задовольняються різні запити). Обслуговуючі апарати можуть бути однорідними (тобто задовольняти будь-які вимоги) чи неоднорідні;

- черга на обслуговування складається з вимог, які потребують обслуговування. Вона може бути присутня, а може бути відсутня, може складатись з реальних або інших (потенціальних) вимог.

Під обслуговуванням розуміється задоволення якої-небудь потреби.

Як зазначалось вище, спільною метою вивчення процесів масового обслуговування слід враховувати оцінювання якості функціонування системи, що обслуговується, виявлення умов забезпечення її успішної роботи при своєчасному задоволенні заяв (вимог), що надходять.

Існує декілька різновидів СМО, які відрізняються особливостями поведінки вимог, що надходять, у випадку, коли вони застають обслуговуючі апарати зайнятими, й організацією робіт обслуговуючих апаратів.

Ще Ерланг звернув увагу на те, що є два типи систем у телефонії – з очікуванням і втратами. Тепер з'ясувалось, що на практиці зустрічається й інші системи. Цьому є підтвердження (рис 3.1).

В упорядкованих системах обслуговуючі апарати не рівномірні. Тому вимога, що надійшла, обслуговується жорстко визначеним з усіх вільних апаратів, а точніше – з найменшим номером, якщо вони пронумеровані.

У неупорядкованих системах усі апарати рівноправні, й вимоги, що тільки-но надійшли, обслуговуються без переваги будь-яким з вільних апаратів.

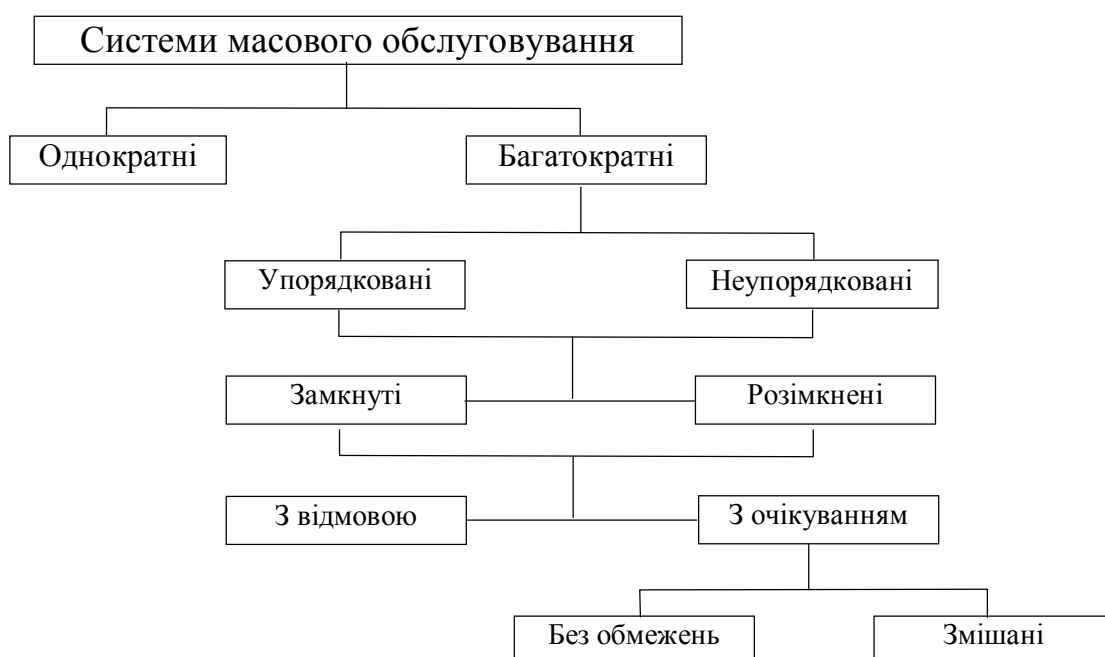


Рисунок 3.1 – Системи масового обслуговування

Системи, що обслуговують обмежену кількість об'єктів, які через деякий час повертаються в систему за новим обслуговуванням, називають замкнутими.

Якщо кількість поступаючих вимог значна і вони надходять безперервно, а обслуговувані вимоги до системи не повертаються, то ці системи називають розімкнутими.

Системи з відмовою: якщо вимога, що надійшла, застає всі обслуговуючі апарати зайнятими, то вона покидає систему, залишаючись не обслуженою.

Система з очікуванням: якщо вимога, що надійшла, застає всі обслуговуючі апарати зайнятими, то вона стає в чергу і чекає обслуговування.

У системах без обмежень на очікування вимозі обслуговування ніяких обмежень не встановлюється.

У змішаних системах обмеженнями можуть бути: час очікування, кількість вимог у черзі на обслуговування, час очікування і обслуговування та ін.

У системах з очікуванням може бути декілька форм обслуговування:

- апарати приймають на обслуговування вимоги у випадковому порядку;
- у порядку черги;
- вимога, яка в найкоротший час має покинути систему;
- вимога, яка надійшла раніше за всіх.

Якість функціонування СМО оцінюється двояко: збоку інтересів вимог, що надходять, та збоку системи, яка їх обслуговує. Потрібно розмежувати критерії якості обслуговування в залежності від типу системи.

У системах з відмовою такими критеріями є:

- середній відсоток заяв, які отримали відмову;
- імовірність відмови черговій вимозі;
- імовірність того, що обслуговуванням займеться декілька апаратів, або вони всі зайняті і т. ін.

У системах з очікуванням наступні критерії:

- середня довжина черги та імовірність її виникнення;
- середній час очікування початку обслуговування;
- імовірність того, що обслуговуючі апарати зайняті або вільні та ін.

Окрім перерахованих критеріїв при оцінюванні функціонування СМО можуть бути використані вартісні показники: вартість обслуговування кожної вимоги в системі; вартість витрат, пов'язаних з простоем вимог за одиницю часу; вартість збитків, пов'язаних з виходом вимог із системи; вартість експлуатації кожного пристрою системи за одиницю часу; вартість одиниці часу простою пристрою системи і т. ін.

У СМО створюються основні числові характеристики вхідного і вихідного потоку вимог, а також характер їх обслуговування. Тому для вирішення завдань раціональної організації обслуговуючої системи потрібно спочатку провести дослідження та математично описати потік вимог і час обслуговування. Для цього використовуються фотографії робочого часу, диспетчерського та оперативного обліку.

ТЕМА 4 ЗАДАЧІ УПОРЯДКУВАННЯ ТА КООРДИНАЦІЇ. СІТЬОВЕ ПЛАНУВАННЯ

Пошуки більш ефективних способів планування складних процесів призвели до створення принципово нових методів мережного планування та управління (МПУ).

Система методів МПУ – це система методів планування та управління розробкою великих народногосподарських комплексів, науковими дослідженнями, конструкторською і технологічною підготовкою виробництва, нових видів виробів, будівництвом і реконструкцією, капітальним ремонтом основних фондів шляхом застосування сіткових графіків.

Перші системи, які використовували сіткові графіки, були застосовані в США в кінці 50-х років XX ст. та одержали назву СРМ (англійська аббревіатура, яка означає метод критичного шляху) і PERT (метод оцінювання та огляду програми). Система СРМ була вперше застосована при керуванні будівельними роботами, система PERT – при розробці систем «Поларіс».

В Росії роботи з сіткового планування почалися у 60-х роках XX ст. Тоді методи МПУ знайшли застосування в будівництві та наукових розробках. У подальшому сіткові методи стали широко застосовуватися також у інших сферах національної економіки.

МПУ заснований на моделюванні процесу за допомогою сіткового графіка і представляє собою сукупність розрахункових методів, організаційних та контрольних заходів з планування та керування комплексом робіт.

Система МПУ дозволяє:

- формувати календарний план реалізації деякого комплексу робіт;
- виявляти і мобілізувати резерви часу, трудові, матеріальні та грошові ресурси;
- здійснювати керування комплексом робіт згідно з принципом «провідної ланки» з прогнозуванням і попередженням можливих зривів у розвитку робіт;
- підвищувати ефективність керування в цілому при чіткому розподілі відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт.

Діапазон застосування МПУ дуже широкий: від задач, які торкаються діяльності окремих осіб, до проектів, в яких беруть участь сотні організацій та десятки тисяч людей (наприклад, розробка і створення великого територіально-промислового комплексу).

Під комплексом робіт (комплексом операцій, або проектів) ми розуміємо будь-яку задачу, для виконання якої необхідно виконати достатньо велику кількість різноманітних робіт. Це може бути й будівництво деяких будівель, корабля, літака або будь-якого іншого складного об'єкта, і розробка проекту цієї споруди, і навіть процес будівництва планів реалізації проекту.

Для того, щоб скласти план робіт щодо здійснення великих і складних проектів, які складаються з тисячі окремих досліджень і операцій, необхідно описати його за допомогою деякої математичної моделі. Таким засобом опису проектів (комплексів) є сіткова модель.

1. Мережна модель та її основні елементи.

Мережна модель представляє собою план виконання деякого комплексу взаємозв'язаних робіт (операцій), заданого в специфічній формі-сітці, графічне зображення якої називається сітковим графіком. Відмінною особливістю сіткової моделі є чітке визначення всіх тимчасових взаємозв'язків майбутніх робіт.

Головними елементами мережної моделі є події та роботи.

Термін «робота» використовується в МПУ в широкому розумінні. По-перше, це дійсна робота – протяжний у часі процес, який потребує затрат ресурсів (наприклад, збирання виробу, випробування приладу і т.п.). Кожна дійсна робота повинна бути конкретною, чітко описаною та мати відповідального виконавця.

По-друге, це чекання – протяжний у часі процес, який не потребує затрат праці (наприклад, процес висихання після фарбування, старіння металу, затвердіння бетону і т.п.).

По-третє, це залежність, або фіктивна робота – логічний зв'язок між двома або декількома роботами(подіями), які не потребують затрат праці, матеріальних ресурсів або часу. Вона вказує, що можливість однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої. Природно, що тривалість фіктивної роботи приймається за нуль.

Подія – це момент завершення якогось процесу, що відображає окремий етап виконання проекту. Подія може бути приватним результатом окремої роботи або сумарним результатом декількох робіт. Подія може здійснитися тільки тоді, коли закінчаться усі роботи, попередні їй. Наступні роботи можуть розпочатися тільки тоді, коли подія здійсниться. Звідси двобічний характер події: для усіх безпосередньо попередніх їй робіт вона є кінцевою, а для усіх безпосередньо наступних за нею – початковою. При цьому припускається, що подія не має тривалості та здійснюється нібито миттєво. Тому кожна подія, яка включається до сіткової моделі, повинна бути повно, точно та всебічно визначена, її формулювання повинне включати в себе результат усіх безпосередньо попередніх їй робіт.

Поміж подій сіткової моделі виділяють початкові й завершальні події. Початкова подія не має попередніх робіт і подій, які відносяться до поданого в моделі комплексу робіт. Завершальна подія не має наступних робіт і подій.

Події на сітковому графіку зображуються кружками а робота – стрілками, які показують зв'язок між роботами.



Рисунок 4.1 – Фрагмент мережного графіку

На рисунку 4.2 зображений мережний графік задачі моделювання і побудови оптимального плану деякого економічного об'єкта. Щоб вирішити цю задачу, необхідно здійснити наступні роботи: А – сформулювати проблему дослідження; Б – побудувати математичну модель об'єкта, який вивчаємо; В – зібрати інформацію; Г – обрати метод вирішення задачі; Д – побудувати і налагодити програму для ЕОМ; Е – розробити оптимальний план; Ж – передати результати розрахунку замовнику. Цифрами на графіку позначені номери подій, до яких призводить виконання відповідних робіт.

З графіка, наприклад, випливає, що роботи В і Г можна почати виконувати незалежно одна від одної тільки після здійснення події 3, тобто, коли будуть виконані роботи А і Б; роботу Д – після здійснення події 4, коли будуть виконані роботи А, Б і Г; а роботу Е можна здійснити після настання події 5, тобто при здійсненні усіх попередніх їй робіт А, Б, В, Г і Д.

У мережній моделі, яка представлена на рисунку 4.2 а, немає числових оцінювань. Така мережа називається структурною. Однак, на практиці частіше використовуються сітки, в яких задані оцінювання тривалості робіт (вказані в годинах, тижнях, декадах, місяцях і т.п. над відповідними стрілками), а також оцінювання інших параметрів, наприклад, трудомісткості, вартості і т.п. Саме такі сітки ми будемо розглядати в подальшому.

Однак, може бути й інший принцип побудови мереж – без подій. В такій мережі вершини графіка (наприклад, зображені прямокутниками) означає певні роботи, а стрілки залежності між цими роботами, визначають порядок їх виконання. В якості прикладу мережний графік «події–робота» задачі

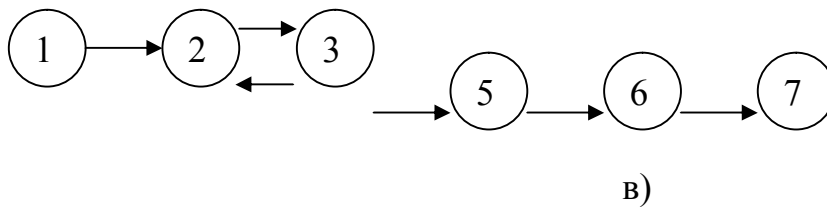
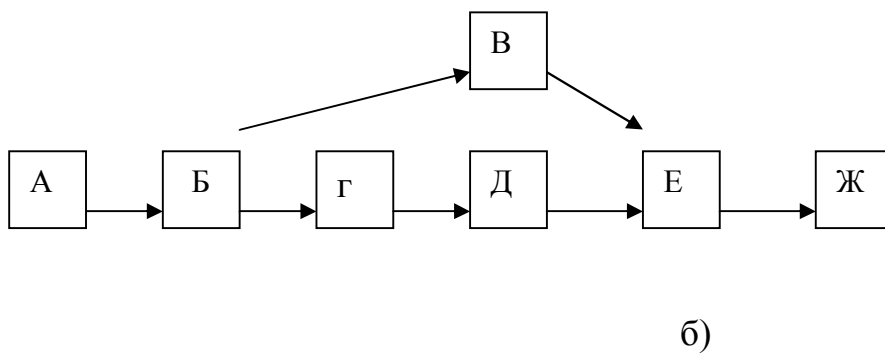
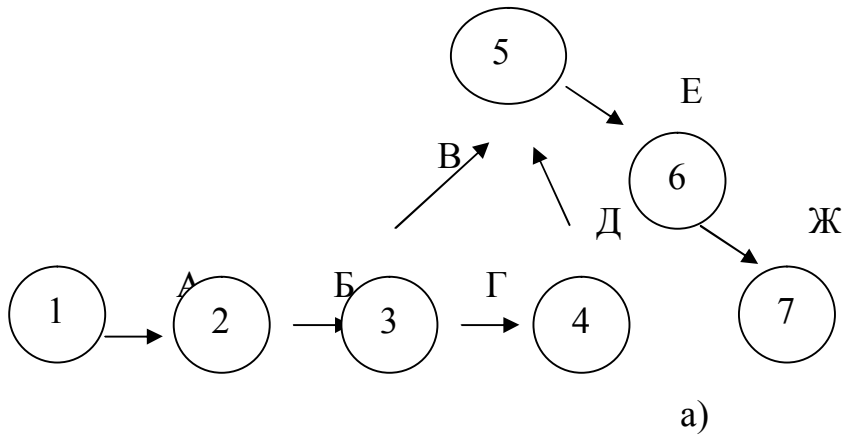


Рисунок 4.2 – Мережний графік задачі моделювання і побудови оптимального плану деякого економічного об'єкту

модулювання і побудови оптимального плану деякого економічного об'єкта, який знаходиться на рисунку 4.3, а, представлений у вигляді сітки «роботи– зв'язки» на рисунку 4.3, б. А мережний графік «події–робота» має ту ж саму задачу, але з невдало складеним переліком робіт, представлений на рисунку 4.3, в. У мережі не повинно бути замкнених контурів і петель, тобто шляхів, які з'єднують деякі події з самими ними.

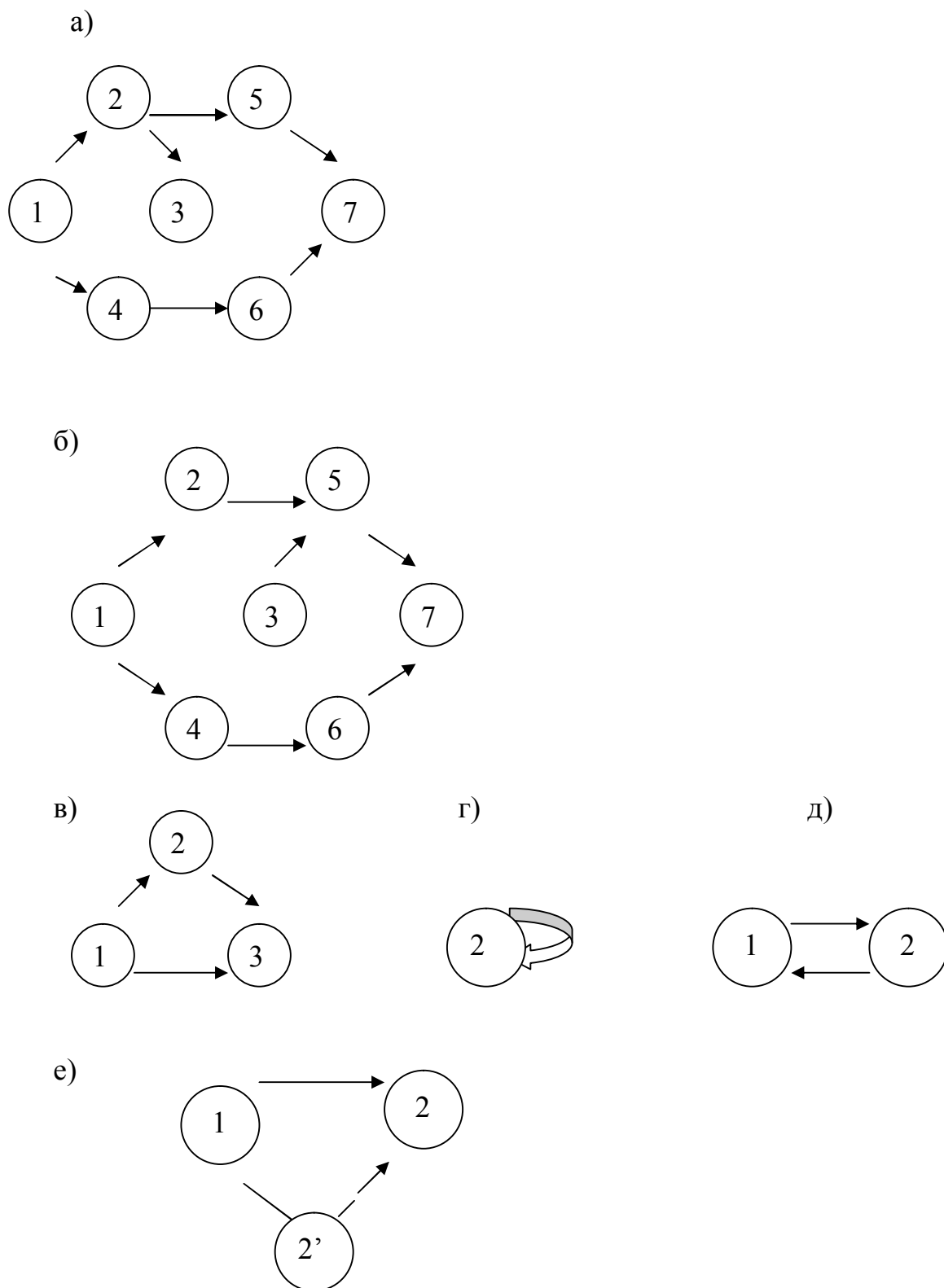
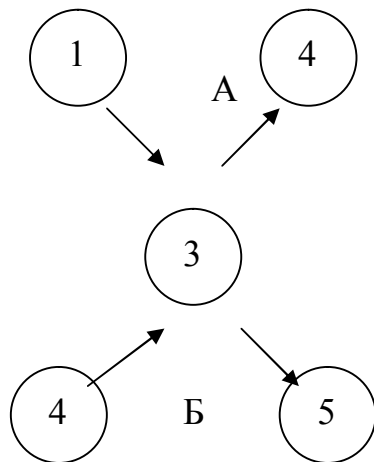
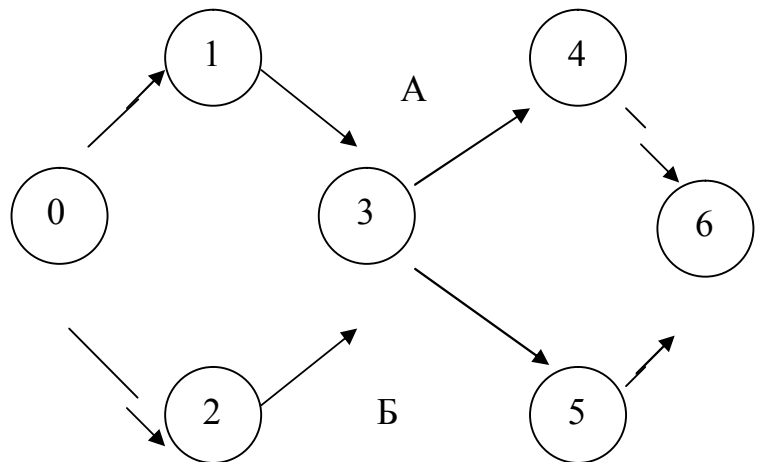


Рисунок 4.3 – Мережний графік

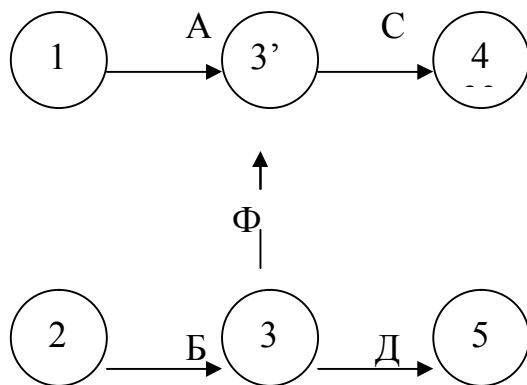
ж)



к)



л)



Продовження рисунка 4.3

Слід відзначити, що мережний графік «роботи–зв’язки» на відміну від графіка «події–роботи» володіє відомими перевагами: не містить фіктивних робіт, має більш просту техніку побудови та перебудови, включає тільки добре знайомі виконавцям уявлення роботи без менш звичного уявлення події. Разом з тим, сітки без подій є значно більш громіздкими, так як подій звичайно значно менше, ніж робіт (показник складності сітки, дорівнює відношенню числа робіт до числа подій, як правило, суттєво більше одиниці). Тому ці сітки менш ефективні з точки зору керування комплексом. Цим і пояснюється той факт, що (при відсутності в цілому принципіальних відмінностей між двома формулами

уявлення сітки) у нинішній час найбільше поширення отримали сіткові графіки «події–роботи».

Таким чином, ми розглянули перше питання «Мережна модель та її основні елементи».

Мережні графіки складаються на початковому етапі планування. На початку планувальний процес поділяється на окремі роботи, складається перелік робіт і подій, продумуються їх логічні зв'язки і послідовність виконання, роботи закріплюються за відповідними виконавцями. З їх допомогою оцінюється тривалість кожної роботи. Потім складається (зшивається) сітковий графік. Після упорядкування сіткового графіка розраховуються параметри подій і робіт, визначаються резерви часу та критичний шлях. Нарешті, проводиться аналіз і оптимізація сіткового графіка, який при необхідності малюється новий з переліченням параметрів подій і робіт.

При побудові мережного графіка необхідно дотримуватися ряду правил.

1. У мережній моделі не повинно бути «глухих кутів» подій, тобто подій, з яких не виходить не одна робота, за винятком завершальної події (рис.4.3, а). Тут або робота (2, 3) не потрібна або її необхідно анулювати, або не помічена необхідність певної роботи, наступної за подією 3 для здійснення якої-небудь наступної події. У таких випадках необхідне ретельне вивчення взаємозв'язків подій і робіт для виправлення непорозуміння.

2. У мережному графіку не повинно бути «хвостових» подій (крім початкових), яким не передуює хоча б одна робота (подія 3 – на рис.4.3, б). Тут роботи, передуючі події 3, не передбачені. Тому подія 3 не може здійснитися, а отже, не може бути виконана і наступна за нею робота (3, 5) . Виявивши у сітці такі події необхідно визначити виконавців передуючих їм робіт та включити ці роботи в сітку.

Уявімо, що на мережному графіку, який зображений на рисунку 4.3, а, роботи Б (побудова математичної моделі) і Д (побудова і налагодження програми для ЕОМ) при формуванні первісного списку робіт ми об'єднали б у

єдину роботу Б. Тоді отримали б мережний графік, зображений на рисунку 4.3, в. Подія 2' означає, що дозволено переходити до роботи Б', яку не можна виконати до вибору метода розрахунку (робота Г), а вибір метода розрахунку не можна починати до закінчення побудови моделі (3'). Іншими словами, у мережі утворився найпростіший контур (2'; 3'; 2').

3. При виникненні контура (а в складних сітках, тобто в сітках з високим показником складності, це зустрічається досить часто і виявляється лише за допомогою ЕВМ) необхідно повернутися до початкових даних і шляхом перегляду складу робіт добитися його центрування. Так, у нашому прикладі знадобився б розподіл роботи Б' на Б і Д.

4. Будь-які дві події повинні бути безпосередньо пов'язані не більш, ніж однією роботою—стрілкою.

Порушення цієї умови відбувається при зображенні паралельно виконаних робіт (рис. 4.3, д). Якщо ці роботи так і залишити, то станеться плутанина із-за того, що дві різні роботи будуть мати однакові позначки (1, 2); як правило, під (і, j) розуміють роботу, яка зв'язує і-у подію з j-ю подією. Однак зміст цих робіт, склад залучених виконавців і якість витрачених на роботи ресурсів можуть істотно відрізнятися.

У цьому випадку рекомендується ввести фіктивну подію (подія 2' на рисунку 4.3, е і фіктивну роботу (робота 2'; 2), при цьому одна з паралельних робіт (1; 2') замикається на цю фіктивну подію. Фіктивні роботи зображені на рисунку пунктирними лініями.

5. У мережі рекомендується мати одну початкову і одну завершальну подію. Якщо в складаній сітці це не так (рис.4.3, ж), то добитися бажаного можна шляхом введення фіктивних подій і робіт, як зображено на рисунку 4.3, к.

Фіктивну роботу і події необхідно вводити і поряд з іншими випадками. Один з них – відображення залежності подій, не зв'язаних з реальними роботами. Наприклад, роботи А і Б (рис.4.3, л) можуть виконуватися незалежно одне від одного, але за умов виробництва: робота Б не може починатися раніше, ніж закінчиться робота А. Ця обставина потребує введення фіктивної роботи С.

Інший випадок – неповна залежність робіт. Наприклад, робота С потребує для свого початку завершення робіт А і Б, але робота Д зв’язана тільки з роботою Б, а від роботи А не залежить. Тоді стає за необхідне введення фіктивної роботи Ф і фіктивної події З’, як зображено на рисунку 4.3, л.

Крім того, фіктивні роботи можуть вводитися для відображення реальних відстрочок і очікування. На відміну від попередніх випадків тут фіктивна робота характеризується подовженням у часі.

Таким чином, ми розглянули друге питання «Порядок і правила побудови мережних графіків».

Мережне планування і керування (МПУ) – система, яка застосовується у будівництві в керуванні великими науково-технічними розробками ті іншими комплексами робіт; заснована на використанні ЕОМ і мережних графіків. Такий графік представляє мету робіт (операцій) і подій, відображаючи їх технологічну послідовність і зв’язок у процесі досягнення цілі.

На його основі ЕОМ може виготовити аналіз стану процесу в кожний заданий момент часу, визначити послідовність робіт, які можуть затримати виконання плану до зазначеного терміну (критичний шлях), і, таким чином, «порадити» керівництву оперативно вжити необхідних заходів. Така система МПУ орієнтована на критерій часу.

Приклад мережного графіка наведений на рисунку 4.4. В кружечках тут вказані номери подій, стрілки означають роботи, а цифри над ними називаються тимчасовими оцінками; вони вказують орієнтовну тривалість робіт.

Є й такі мережні графіки, які орієнтовані не на критерій часу, а, наприклад, на скорочення вартості робіт.

Розрахунки за такою мережею (наприклад, знаходження критичного шляху) можна легко зробити власноручно. Реальні ж мережні графіки містять сотні і навіть тисячі робіт і подій. Їх аналіз можливий тільки за допомогою ПЕОМ.

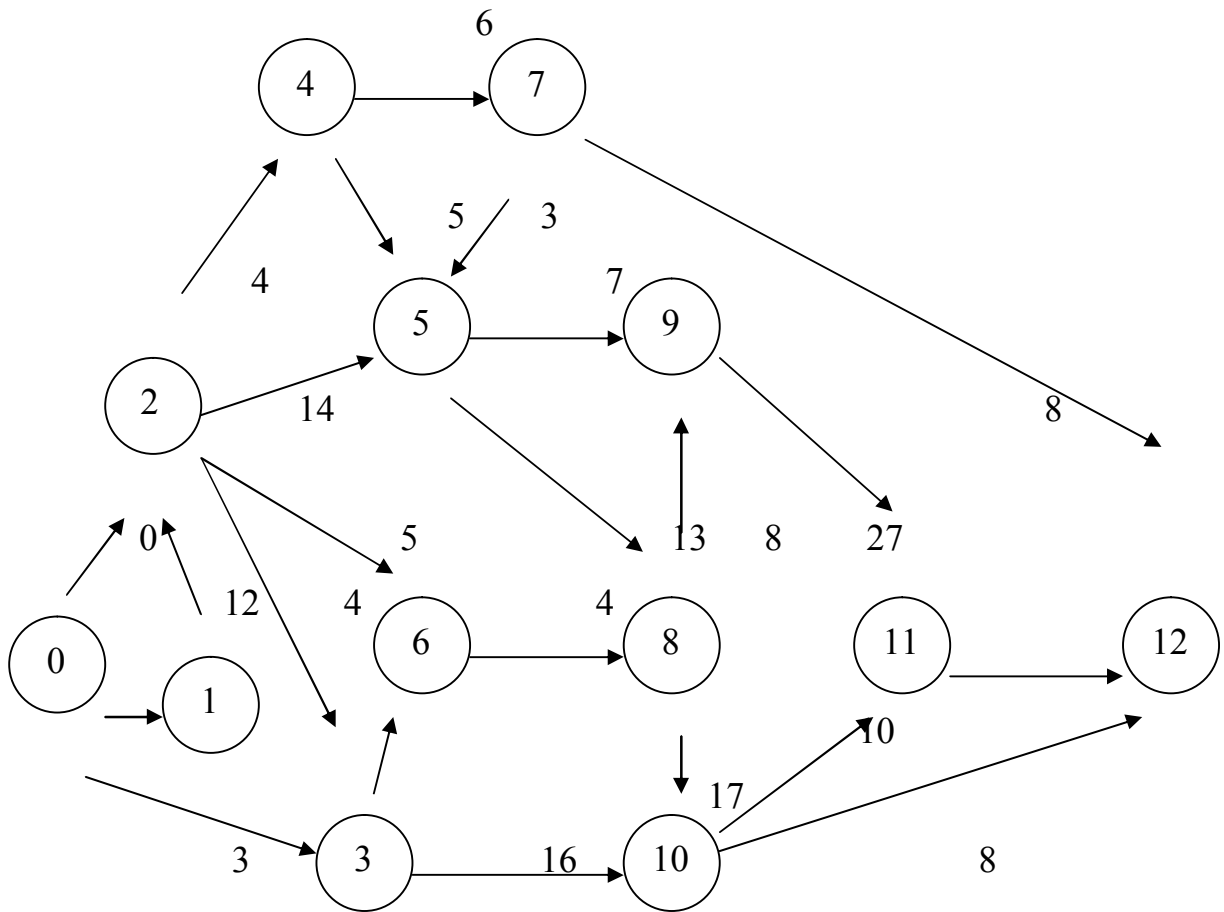


Рисунок 4.4 – Визначення критичного шляху мережного графіку

ЗАДАЧА № 1

На прикладі сіткового графіка, поданого на рисунку 4.5, розглянемо методи обчислення основних параметрів сіткового графіка. Кожну з вершин розбиваємо на чотири частини:

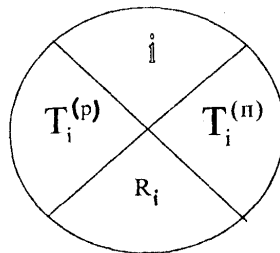


Рисунок 4.5 – Сітковий графік

У північній частині записується номер події, в інших частинах вершини будуть записані параметри, які ми введемо нижче. Цифри над дугами означають тривалість операцій.

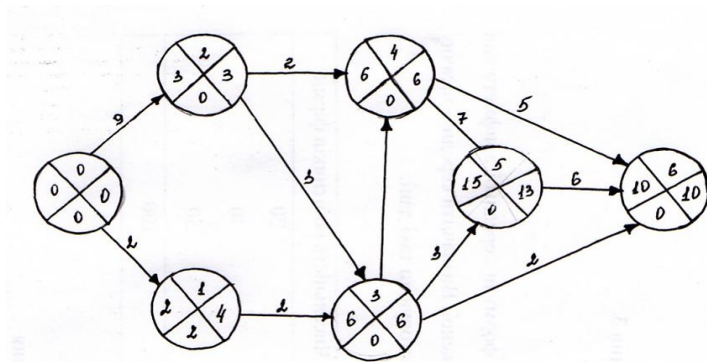


Рисунок 4.6 – Розрахунок критичного та інших параметрів сіткового графіку

Розрахунок критичного та інших параметрів сіткового графіка включає два етапи:

1. Перший етап: прямий хід

Під час прямого ходу обчислюються ранні строки стану подій, які ми будемо позначати $T_j^{(p)}$. Ми будемо вважати, що ранній строк стану вихідної події дорівнює нулю $T_0^{(p)} = 0$.

Обчислення ранніх строків стану подій починаються з вихідної події і проводиться в порядку зростання номерів вершин до тих пір, доки не буде досягнута заключна подія.

Позначимо t_{ij} – тривалість роботи (i, j). Обчислення ранніх строків відбуття подій виконується за формулою:

$$T_j^{(p)} = \max_{(i,j) \in V_j^+} \{T_i^{(p)} + t_{ij}\} \quad j = 1, \dots, \bar{n},$$

де V_j^+ – множина всіх операцій, які закінчуються подією j.

Ранні строки стану подій записуються в західному куті круга, який відповідає цій операції.

Подією 1 закінчується лише одна операція (0,1) тривалістю $t_{01} = 2$, тому:

$$T^{(p)}_1 = T^p_0 + t_{01} = 0 + 2 = 2.$$

Зразу ж розглядати подію 3 не можна, тому що T^p_2 ще невідоме.

$$T^{(p)}_2 = T^p_0 + t_{02} = 0 + 3 = 3.$$

Запишемо значення T^p_2 у відповідну клітину.

Тепер знайдемо:

$$T^p_3 = \max\{T^p_1 + t_{13}, T^p_2 + t_{23}\} = \max\{2 + 2, 3 + 3\} = 6$$

Далі обчислення значень проводяться за аналогією, доки не будуть обчислені усі значення T^p_i , для всіх $i = 0, \dots, N$.

$$T^p_4 = \max\{T^p_2 + t_{24}, T^p_3 + t_{34}\} = \max\{3 + 2, 6 + 0\} = 6$$

$$T^p_5 = \max\{T^p_4 + t_{45}, T^p_3 + t_{35}\} = \max\{6 + 7, 6 + 3\} = 13$$

$$T^p_6 = \max\{T^p_4 + t_{46}, T^p_5 + t_{5,6}, T^p_3 + t_{3,6}\} = \max\{6 + 5, 13 + 6, 6 + 2\} = 19$$

Після надання примітки кінцевій вершині обчислення прямого ходу завершуються.

Критичний час дорівнює ранньому строку завершення кінцевої події.

Таким чином комплекс робіт можна виконати за 19 одиниць часу.

2. Другий етап: зворотний хід

На цьому етапі обчислюються пізні строки відбуття подій, які ми будемо позначати $T^{(n)}_i$. Починаються обчислення з кінцевої події комплексу робіт, при цьому вважають, що $T^{(n)}_N \equiv T^p_N$, де N – номер заключної події. Значення $T^{(n)}_i$ обчислюються за формулою:

$$T^{(n)}_i = \min_{(i,j) \in V^-} \{T^{(n)}_j - t_{ij}\},$$

де V_j^+ – множина всіх операцій, які закінчуються подією j .

Їх записують в східному куті.

$$T^{(n)}_6 = T^p_6 = 19;$$

$$T_5^{\text{п}} = 19 - 6 = 13;$$

$$T_4^{\text{п}} = \min\{19 - 5, 13 - 7\} = 6; \quad T_3^{\text{п}} = \min\{6 - 0, 13 - 3, 19 - 2\} = 6;$$

$$T_2^{\text{п}} = \min\{6 - 3, 6 - 2\} = 3; \quad T_1^{\text{п}} = 6 - 2 = 4;$$

$$T_0^{\text{п}} = \min\{4 - 2, 3 - 3\} = 0.$$

Обчислення на зворотному шляху закінчені.

Після знаходження ранніх та пізніх строків відбуття подій знаходять резерви часу подій R_k , тобто час, на який можна відкласти момент початку події, не перевищуючи загальний час виконання комплексу робіт.

Чисельне значення резерву часу події знаходиться за формулою:

$$R_k = T_k^{(\text{п})} - T_k^{(\text{р})},$$

його записують у нижньому кутку вершини.

Після закінчення обчислення чотирьох основних параметрів подій починають обчислення параметрів робіт (операцій).

В першу чергу з'ясовують належить робота критичному шляху чи ні. Операція (i,j) належить критичному шляху, якщо вона задовольняє наступним трьома умовам:

$$1) T_i^{\text{п}} = T_i^{\text{р}}$$

$$2) T_j^{\text{п}} = T_j^{\text{р}}$$

$$3) T_j^{\text{р}} - T_i^{\text{р}} = T_j^{\text{п}} - T_i^{\text{п}} = t_{ij}.$$

Ці умови означають, що між ранніми та пізніми строками початку (завершення) операції запас часу відсутній.

У критичних операціях (i,j) числа, які проставлені в східному й західному кутах подій (i та j), однакові. Таким чином, резерв події, яка записана у південному куті події, дорівнює нулю. У критичних операціях різниця чисел, які записані у правому куті події j та лівому куті події i , дорівнює t_{ij} .

У нашому прикладі критичний шлях включає операції $(0,2)$; $(2,3)$; $(3,4)$; $(4,5)$ та $(5,6)$. Відмітимо, що операції $(2,4)$; $(3,5)$; $(3,6)$; $(4,6)$ задовольняють умовам (1) – (2), але не умовам (3), тому не є критичним.

Для робіт обчислюються наступні параметри :

1) $t_{ij}^{(pn)}$ – ранній початок робіт – $t_{ij}^{(pn)} = T_i^{(p)}$;

2) $t_{ij}^{(pz)}$ – раннє закінчення роботи – $t_{ij}^{(pz)} = T_i^{(p)} + t_{ij}$;

3) $t_{ij}^{(пз)}$ – пізнє закінчення роботи – $t_{ij}^{(пз)} = T_j^{(n)}$;

4) $t_{ij}^{(пп)}$ – пізній початок; $t_{ij}^{(пп)} = T_j^{(n)} - t_{ij}$;

5) $t_{ij}^{(n)}$ – повний резерв часу роботи: він обчислюється за формулою:

$$r_{ij}^{(n)} = T_j^{(n)} - T_i^{(p)} - t_{ij} = T_j^{(n)} - t_{ij}^{pz}$$

Повний резерв показує, на яку величину по відношенню до $T_i^{(p)}$ можна змістити початок роботи так щоб не збільшити час виконання всього проекту.

6) $r_{ij}^{(b)}$ – вільний резерв часу роботи: він обчислюється за формулою:

$$r_{ij}^{(b)} = T_j^{(p)} - T_i^{(p)} - t_{ij}$$

Вільний резерв показує, в якому інтервалі можна пересувати час виконання роботи за умови того, що ранні строки наступних подій не змінюються.

Результати обчислень для прикладу, який розглядається, можна звести в зручну для користування таблицю:

Ця таблиця містить усю інформацію, яка необхідна для побудови календарного графіка.

ТЕМА 5 ЗАДАЧІ ТА МОДЕЛІ ЗАМІНИ

Задача заміни – це прогнозування витрат, пов'язаних з відновленням устаткування, і виробленням найбільш економічної стратегії проведення цієї роботи. В дослідженні операцій виробляється ряд методів, котрі дозволяють вирішувати задачі заміни двох типів:

а) коли продуктивність устаткування падає в процесі експлуатації (внаслідок зносу) і воно застаріває морально в результаті появи нових, більш досконалих машин;

б) коли устаткування не застаріває, але в якийсь момент виходить з ладу (наприклад, електролампочки).

У першому випадку порівнюються затрати та придбання нового

устаткування з витратами експлуатації діючого і знаходиться оптимальний момент заміни. Для вирішення деяких з цих задач використовуються методи динамічного програмування.

У другому випадку визначають, які саме одиниці потрібно замінювати та як часто проводити заміну, щоб мінімізувати загальні затрати, пов'язані як з покупкою нового устаткування, так і зі збитком, котрий наносить несправне устаткування до його заміни. В цих задачах широко використовуються фізико-статистичні методи оскільки вихід із ладу устаткування завжди має нерегулярний, вірогідний характер.

1. Задача про заміну устаткування.

В інженерно-економічній практиці задача про заміну устаткування має першорядне значення. Це одна з основних проблем індустріального розвитку в умовах науково-технічного прогресу. Ми розглянемо її в спрощеній постановці. Відомо, що устаткування з часом зношується, старіє фізично і «морально». Як правило, в процесі експлуатації його продуктивність падає і зростають експлуатаційні видатки на поточний ремонт. З часом виникає потреба заміни устаткування, так як його подальша експлуатація виходить дорожче, ніж ремонт та заміна.

Задача про заміну може якісно бути сформульована так. В процесі роботи устаткування щорічно дає прибуток, потребує експлуатаційних затрат і має деяку залишкову вартість. Перераховані характеристики залежать від його віку.

У будь-якому році устаткування можна зберегти чи продати за залишковою ціною, купити нове. У випадку збереження устаткування зростають його експлуатаційні видатки і знижується продуктивність. При заміні потрібні значні додаткові капітальні вкладення. Задача полягає у визначенні оптимальної стратегії заміни в плановому періоді в тому, щоб сумарний прибуток за плановий період була максимальним. Критерієм оптимальності, як правило, є прибуток від експлуатації устаткування (задача максимізації), або сумарні затрати на експлуатацію в перебігу планованого періоду (задача мінімізації).

При побудові моделі задачі прийнято вважати, що рішення про заміну виноситься на початок кожного проміжку експлуатації (наприклад, на початок року) і що в принципі устаткування можна використовувати необмежено довго.

Основна характеристика устаткування – параметри стану – його вік t .

При складанні динамічної моделі заміни процес заміни розглядають як n -кроковий, розвиваючи весь період експлуатації на n кроків. Можливе управління на кожному кроці характеризується кількісними ознаками, наприклад: x^c (зберегти устаткування), x^3 (замінити) та x^p (зробити ремонт).

Таким чином, в першому питанні ми розглядали теорію задачі про заміну устаткування. Для підкріплення теорії практикою в другому питанні розглянемо конкретний приклад.

2. Практичне рішення задачі про заміну устаткування.

Устаткування експлуатується на протязі 5 років, після цього продається. На початку кожного року можна прийняти рішення зберегти устаткування або замінити його на нове. Вартість нового устаткування $p_0 = 4000$ грн. Після t років експлуатації ($1 \leq t \leq 5$) устаткування можна продати за $q(t) = p_0 2^{-t}$ грн. (ліквідна вартість). Витрати на утримання на протязі року залежать від віку t устаткування і дорівнює $r(t) = 600(t - 1)$. Визначити оптимальну стратегію експлуатації устаткування, щоб сумарні затрати з урахуванням початкової покупки і завершальної продажі були мінімальними.

Рішення. Спосіб розподілу управління на кроки природний, по роках, $n = 5$. Параметр стану – вік машини – $s_{k-1} = t, s_0 = 0$ – машина нова на початку першого року експлуатації. Управління на кожному кроці залежить від двох змінних X^c і X^3 .

Рівняння станів залежать від управління:

$$\begin{cases} s_k = t + 1, & \text{якщо } X_k = X^c, \\ s_k = 1, & \text{якщо } X_k = X^3, k = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (5.1)$$

Справді, якщо до k -му кроку $s_{k-1} = t$, то при збереженні машини ($X_k = X^c$) через рік вік машини збільшиться на 1. Якщо машина замінюється новою ($X_k = X^3$), то це означає, що до початку k -го кроку її вік $t = 0$, а після року експлуатації $t = 1$, тобто $s_k = 1$

Показник ефективності k -го кроку:

$$f_k = (X_k, t) = \begin{cases} 600(t+1), & \text{якщо } X_k = X^c \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t}, & \text{якщо } X_k = X^3 \end{cases} \quad k=1,2,3,4. \quad (5.2)$$

(При X^c витрати тільки на експлуатацію машини віку t , при X^3 машина продається ($-4000 - 2^{-t}$), купується нова (4000) і експлуатується протягом першого року (600), загальні витрати дорівнюють ($-4000 \cdot 2^{-t} + 4000 + 600$))

Нехай $Z_k^*(t)$ – умовні оптимальні витрати на експлуатацію машини, починаючи з k -го кроку до кінця, за умови, що до початку k -го кроку машина має вік t років. Запишемо для функцій $Z_k^*(t)$ рівняння Беллмана, замінивши задачу максимізації на задачу мінімізації:

$$Z_5^* = \begin{cases} 600(t+1) - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, & \text{якщо } X_5 = X^c \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} - 4000 \cdot 2^{-(t+1)}, & \text{якщо } X_5 = X^3 \end{cases} \quad (5.3)$$

Величина $4000 \cdot 2^{-(t+1)}$ – вартість машини віку t років (за умовою машина після 5 років експлуатації продається).

$$Z_k^* = \begin{cases} 600(t+1) - Z_{k+1}^*(t+1), & \text{якщо } X_k = X^c \\ 4600 - 4000 \cdot 2^{-t} + Z_{k+1}^*(1), & \text{якщо } X_k = X^3 \end{cases} \quad k=4,3,2,1 \quad (5.4)$$

З визначення функцій $Z_k^*(t)$ випливає, що

$$Z_{\min} = Z_1^*(0).$$

Демо геометричне рішення цієї задачі. На осі абсцис будемо відкладати номер кроку k , на осі ординат – вік t машини. Точка $(k-1, t)$ на площині відповідає початку k -го року експлуатації машини віку t років. Переміщення на графіку залежно від прийнятого управління на k -м кроці показане на рисунку 5.1.

Стан початку експлуатації машини відповідає точці $s_0^*(0;0)$, кінець – точкам $\bar{s}(6;t)$. Будь-яка траєкторія, що переводить точку $s(k-1;1)$ з s_0^* в \bar{s} , складається з відрізків – кроків, що відповідають рокам експлуатації. Треба вибрати таку траєкторію, при якій витрати на експлуатацію машини опиняться мінімальними.

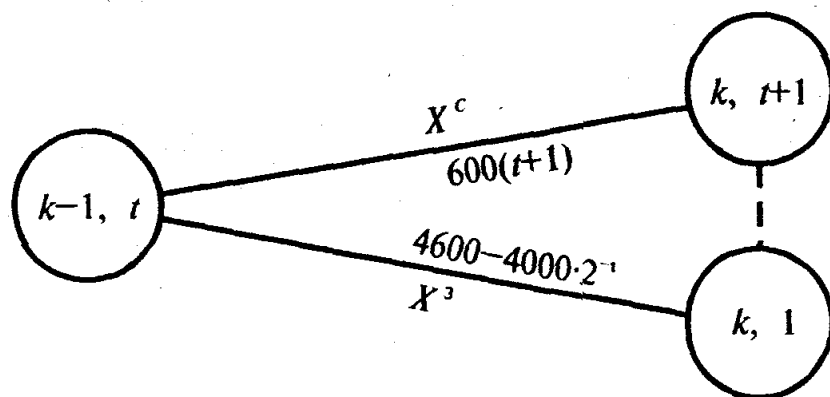


Рисунок 5.1 – Геометричне рішення задачі

Над кожним відрізком, що з'єднує точки $(k-1; t)$ і $(k; t+1)$, запишемо відповідному управлінню X^c витрати, знайдені : $600(t+1)$, а над відрізком, що з'єднує точки $(k-1; t)$ і $(k; t)$, запишемо витрати, що відповідають управлінню X^3 , тобто $4600 - 4000 \cdot 2^{-t}$. У такий спосіб ми розміtimo всі відрізки, що з'єднують точки на графіку, які відповідають переходам з будь-якого стану s_{k-1} в стан s_k (рис. 5.2). Наприклад, над відрізками, що з'єднують крапки $(k; 2)$ і $(k+1; 3)$, стоїть число 1800^1 ,

яке відповідає витратам на експлуатацію протягом кожного року машини віком $t = 2$ років, а над відрізками, що з'єднують $(k; 2)$ і $(k + 1; 1)$, стоїть число 3600 – це сума витрат на покупку машини й експлуатацію нової машини протягом року без «витрат» (виручки) за продану машину віку t років. Варто врахувати, що $0 \leq t \leq k$.

Проведемо на розміченому графі станів (рис. 5.2) умовну оптимізацію.

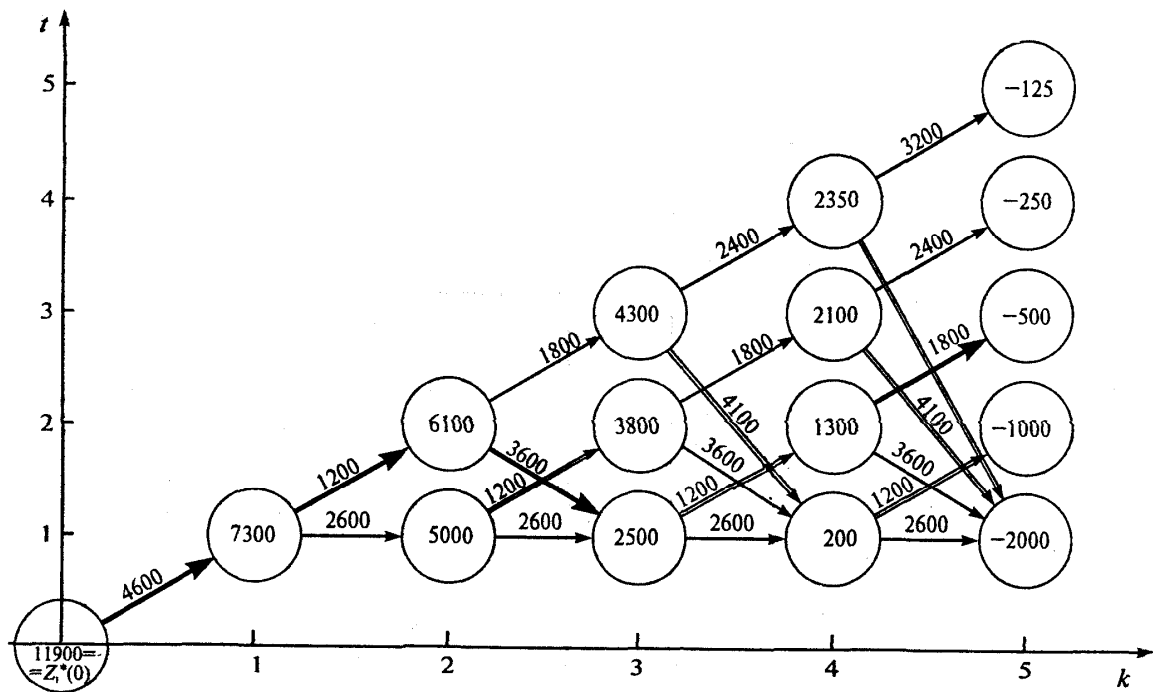


Рисунок 5.2 – Граф станів

У крок. Початкові стани – точки $(4; t)$, кінцеві $(5; t)$. У станах $(5; t)$ машина продається, умовний оптимальний дохід від продажу дорівнює $4000 \cdot 2^{-t}$, але оскільки цільова функція пов'язана з витратами, то в кружках крапок $(5; t)$ поставимо величину доходу зі знаком мінус. Аналізуємо, як можна потрапити з кожного початкового стану в кінцевий на V кроці.

Стан $(4; 1)$. З нього можна потрапити в стан $(5; 2)$, затративши на експлуатацію машини 1200 і виручивши потім від продажу 1000, тобто сумарні витрати рівні 200, і в стан $(5; 1)$ з витратами $2600 - 2000 = 600$. Виходить, якщо до останнього кроку системи перебувала в точці $(4; 1)$, то варто йти в точку

(5; 2) (укажемо цей напрямок подвійною стрілкою), а неминучі мінімальні витрати, що відповідають цьому переходу, рівні 200 (помістимо цю величину $Z_5^*(1) = 200$ в кружку точки (4; 1).

Стан (4; 2). З нього можна потрапити в точку (5; 3) з витратами $1800 - 500 = 1300$ і в точку (5; 1) з витратами $3600 - 2000 = 1600$. Вибираємо перше управління, відзначаємо його подвійною стрілкою, а $Z_5^*(2) = 1300$ проставляємо в кружку точки (4; 2).

Міркуючи в такий же спосіб для кожної точки передостаннього кроку, ми знайдемо для будь-якого результату IV кроку оптимальне управління на V кроці, відзначимо його на рисунку 5.2 подвійною стрілкою. Далі плануємо IV крок, аналізуючи кожний стан, у якому може виявитися система наприкінці III кроку з урахуванням оптимального продовження до кінця процесу, тобто вирішуємо для всіх $0 \leq t \leq 4$ при $k = 4$. Наприклад, якщо початок IV кроку відповідає стану (3; 1), то при управлінні X^c система переходить у точку (4; 2), витрати на цьому кроці 1200, а сумарні витрати за два останніх кроки рівні $1200 + 1300 = 2500$. При управлінні X^3 витрати за два кроки рівні $2600 + 200 = 2800$. Вибираємо мінімальні витрати 2500, ставимо їх у кружок точки (3; 1), а відповідне управління на цьому кроці позначаємо подвійною стрілкою, що веде зі стану (3; 1), у стан (4; 2). Так надходимо для кожного стану (3; t) (рис. 5.2).

Продовжуючи умовну оптимізацію III, II і I кроків, ми одержимо на рисунку 5.2 наступну ситуацію: з кожної точки (стану) виходить стрілка, що вказує, куди варто переміщатися в даному кроці, якщо система виявилася в цій точці, а в кружках записані мінімальні витрати на перехід із цієї точки в кінцевий стан. На кожному кроці графічно вирішувалися рівняння (5.1).

Після проведення умовної оптимізації одержимо в точці (0; 0) мінімальні витрати на експлуатацію машини протягом 5 років з наступним продажем: $Z_{\min} = 11\,900$. Далі будуємо оптимальну траєкторію, переміщаючись із точки $s_0^*(0;0)$ по подвійних стрілках в \hat{s} . Одержуємо набір точок:

$$\{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 1), (4; 2), (5; 3)\},$$

який відповідає оптимальному управлінню $X^*(X^c, X^c, X^3, X^c, X^c)$.

Оптимальний режим експлуатації полягає в тому, щоб замінити машину новою на початку 3-го року.

Таким чином, розмічений графік (мережа) дозволяє наочно інтерпретувати розрахункову схему й вирішити задачу методом ДП.

ТЕМА 6 ЗАДАЧІ З УМОВАМИ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА КОНФЛІКТУ

В умовах невизначеності.

У реальній ситуації той або інший об'єкт економіки, як правило, знаходиться під впливом зовнішніх чинників. При цьому точні значення цих чинників (тобто конкретний стан зовнішнього середовища) заздалегідь невідомі. В цьому випадку особа, яка приймає рішення, повинна виявити можливі стани зовнішнього середовища і оцінити ефективність кожного зі своїх можливих рішень в різних умовах. Після чого необхідно вибрати найбільш прийнятне рішення.

В тому випадку, якщо інформація про стан зовнішнього середовища, яку має в своєму розпорядженні управлінець, не є абсолютно повною і достовірною, то такі умови називаються умовами невизначеності або ризику, а управлінські рішення, прийняті в цих умовах, називаються імовірнісними.

Якщо при цьому відомі вірогідності станів зовнішнього середовища, то такі умови називають умовами ризику, а якщо невідомі – те умовами невизначеності.

Етапи прийняття рішень в умовах ризику або невизначеності наступні:

1. Формування мети прийняття рішення.
2. Побудова економіко-математичної моделі задачі прийняття рішення.
3. Формування переліку альтернативних рішень.

4. Виявлення невизначених зовнішніх чинників, що впливають на досягнення мети, формування можливих станів зовнішнього середовища.

5. Розрахунок ефективності варіантів вирішення при різних станах зовнішнього середовища, формування матриці цінності (загрози) альтернатив.

6. Оцінка вірогідності станів зовнішнього середовища (якщо можливо).

7. Вибір найбільш прийняттого варіанту рішення.

В умовах невизначеності і ризику прийняття рішення за підтримки інформаційних систем може бути основане на аналізі так званої матриці цінності (або загрози) альтернатив. Матриця цінності (загрози) альтернатив в загальному випадку має вигляд, як показано в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Матриця цінності (загрози) альтернатив

Номер альтернативного рішення	Номер стану зовнішнього середовища				
	1	...	j	...	m
1	u_{11}	...	u_{1j}		u_{1m}
...
i	u_{i1}	...	u_{ij}	...	u_{im}
...
n	u_{n1}	...	u_{nj}	...	u_{nm}

У цій матриці величина u_{ij} позначає або цінність, тобто можливу користь (виграш), від прийняття i-го рішення в разі реалізації j-го стану зовнішнього середовища, або загрозу, тобто можливу втрату (програш), від прийнятого рішення.

Як було вказано вище, в умовах невизначеності справжні вірогідності станів зовнішнього середовища невідомі. В цьому випадку приймається гіпотеза про те, що всі вірогідності рівні, тобто, з однаковим ступенем вірогідності може встановитися будь-який з m станів зовнішнього середовища

В умовах невизначеності за наявності матриці цінності альтернатив, прийняття рішень ґрунтується на наступних критеріях: максимінний критерій Вальда («песимістичний»), максимаксний критерій («оптимістичний»), критерій Гурвіца («зважений»), критерій Лапласа («середньозважений»).

Критерій Вальда відповідає песимістичній оцінці: вибирається та альтернатива, для якої песимістична оцінка найбільша, тобто максимум з мінімумів (краща з гірших):

$$u^B = \max_{i=1}^n \left[\min_{j=1}^m (u_{ij}) \right] = \max_{i=1}^n (u_i^{\min}). \quad (6.1)$$

Максимаксний критерій: обирається альтернатива з найбільшою оптимістичною оцінкою (краща з кращих):

$$u^M = \max_{i=1}^n \left[\max_{j=1}^m (u_{ij}) \right] = \max_{i=1}^n (u_i^{\max}). \quad (6.2)$$

Критерій Гурвіца (зважений критерій): альтернативи оцінюються згідно виразу:

$$\bar{u}_i = (1 - \alpha) u_i^{\min} + \alpha u_i^{\max}, \quad i \in [1, n], \quad (6.3)$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$ – коефіцієнт оптимізму. Значення $\alpha=0$ відповідає песимістичній оцінці (тобто критерію Вальда), а значення $\alpha=1$ відповідає оптимістичній оцінці (тобто максимаксному критерію). Проміжні значення α відповідають песимістично-оптимістичному, тобто зваженому підходу. Задавши фіксоване значення коефіцієнта оптимізму, і розрахувавши по всі значення, вибирають альтернативу з найбільшою оцінкою:

$$u^G = \max_{i=1}^n (\bar{u}_i). \quad (6.4)$$

Критерій Лапласа: альтернативи оцінюються з урахуванням всього діапазону цінностей (а не тільки гіршого і/або кращого значень):

$$\bar{u}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m u_{ij}, \quad i \in [1, n]. \quad (6.5)$$

Далі після розрахунку по всіх середніх значень \bar{u}_i вибирають альтернативу з найбільшою оцінкою:

$$u^* = \max_{i=1}^n (\bar{u}_i). \quad (6.6)$$

В умовах ризику.

Нехай є матриця цінності альтернатив, як показано в таблиці 6.1, і при цьому яким-небудь чином (наприклад, експертним методом) оцінена вірогідність всіх m станів зовнішнього середовища p_j , де $1 \leq j \leq m$. При цьому передбачається, що зовнішнє середовище («природа») є пасивним і не створює протидії особі, що приймає рішення. Тоді для оцінки альтернативних рішень можуть бути використані інформаційні системи з реалізацією критеріїв Байеса–Лапласа та Ходжеса–Лемана:

Критерій Байеса–Лапласа для кожної можливої альтернативи передбачає розрахунок наступних оцінок:

$$\bar{\bar{u}}_i = \sum_{j=1}^m p_j u_{ij}, \quad i \in [1, n]. \quad (6.7)$$

Далі після розрахунку по (6.7) всіх значень $\bar{\bar{u}}_i$ вибирають альтернативу з найбільшою оцінкою:

$$u^{BL} = \max_{i=1}^n \bar{\bar{u}}_i. \quad (6.8)$$

Критерій Ходжеса–Лемана оснований на обчисленні наступних оцінок:

$$\bar{u}_i = (1 - \beta)u_i^{\min} + \beta \bar{u}_i, i \in [1, n]. \quad (6.9)$$

де $0 \leq \beta \leq 1$ – коефіцієнт довіри до отриманих вірогідностей p_j , тобто до експертів;

\bar{u}_i – оцінки, розраховані по критерію Байеса–Лапласа.

Значення $\beta = 0$ відповідає повній недовірі до експертів і песимістичній оцінці (тобто критерію Вальда); $\beta = 1$ відповідає повній довірі до експертів і оцінці за критерієм Байеса–Лапласа.

ТЕМА 7 БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ В МЕНЕДЖМЕНТІ

Методів багатокритеріальної оптимізації існує досить багато. Це викликано великою кількістю прикладних задач, що включають в себе суть комплексної оцінки ситуації. Нехай дай n -мірний вектор параметрів X , що характеризує досліджувану ситуацію, щодо якої приймається рішення:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7.1)$$

Вектор X може являти собою інвестиції підприємства в різні сфери діяльності, виділені трудові та інші ресурси, фактори стимулювання праці співробітників та ін.

Критеріями є показники зростання і розвитку економічної системи. У ряді випадків крім критеріїв задаються обмеження, при виконанні яких необхідно досягти екстремальних результатів.

Це загальна постановка задачі багатокритеріальної оптимізації.

Як приклад можна привести завдання на визначення обсягів випуску продукції підприємства, при яких буде досягатися максимум прибутку і мінімум собівартості.

Можливі випадки, коли поставлена математична задача не має рішення. Дійсно, у наведеному прикладі точка в просторі ознак (7.1), в якій досягається максимум прибутку, ніколи не збігається з точкою, в якій мінімальна собівартість продукції. Тобто математичні рішення в ряді випадків не можуть описати адекватно ситуацію прийняття рішень. Це актуалізує проблему розв'язання багатокритеріальних задач. Існує два основних підходи до се рішенню:

- зведення багатокритеріальної задачі до однокритерійним;
- паралельний облік декількох критеріїв.

Зведення багатокритеріальної задачі оптимізації до однокритеріального завдання.

Даний підхід спирається на різні способи постановки і вирішення багатокритеріальних задач, виходячи з певного компромісу між приватними критеріями.

Ідея компромісу полягає в тому, що будується якась функція, що залежить від заданих приватних критеріїв

Щодо цієї функції, що враховує значення приватних критеріїв, будується завдання оптимізації. Причому правило побудови цієї функції лежить у сфері прикладної економіки. Таким чином, будується функція, аргументами якої є вихідні критерії. Вибором виду критеріальною функції займається ЛПР, а не математики. Останні можуть давати рекомендації ЛПР для прийняття рішення.

Мультиплікативна згортка оперує твором ступенів приватних критеріїв. Характерним прикладом мультиплікативної згортки є виробнича функція підприємства, що представляє собою зважене твір трудового і фінансового капіталу підприємства. Мультиплікативні згортки легко зводяться адитивним шляхом до логарифмування приватних критеріїв.

Вибір виду згортки – складне завдання, потребує хорошого розуміння сутності досліджуваного процесу. Якщо ЛПР схильний щодо застосування приватних критеріїв спиратися на союз «або» (рішення приймається,

якщо або перший критерій виконується, або другий, або ... і т.д.), то адекватніше використовувати аддитивну згортку критеріїв. Якщо сполучною є союз «і» (рішення приймається, якщо і перший критерій виконується, і другий, і ... і т.д.), то правильніше прийняти мультипликативну згортку критеріїв.

Перевагою згортки критеріїв є спрощення задачі аналізу за рахунок зведення її до однокритерійним постановці. Недолік криється в невинновданій в ряді випадків компенсації одних ефектів іншими, неможливості розділити і порівняти ці ефекти.

Процедури обліку багатьох критеріїв. Розглянемо ряд методів другого підходу, при якому здійснюється паралельний облік декількох критеріїв.

1. Найбільш відомим з цих методів є метод Парето, який визначає безліч так званих не поліпшуються (хоча б по одному з приватних критеріїв) рішень. Якщо необхідно оперувати тільки одним варіантом вирішення, то він визначається з додаткових міркувань. Наприклад, вводиться додатковий критерій, не включений до складу спочатку аналізованих показників. Розглянемо ідею методу, орієнтуючись на два приватних критерію: прибуток підприємства P і собівартість S його продукції (рис. 7.1).

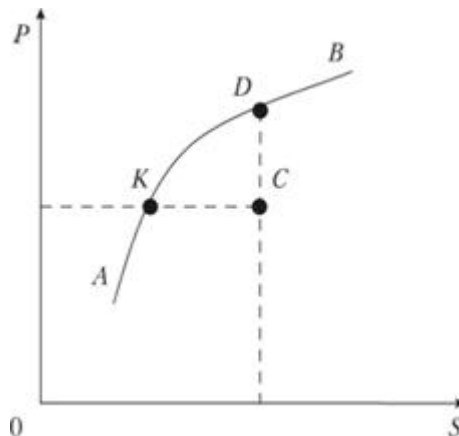


Рисунок 7.1.– Графічна ілюстрація методу Парето

Точки площині $S \geq 0, P \geq 0$ характеризують різні, порівнювані між собою ситуації, в яких може перебувати підприємство. Ситуація, що описується

точкою С, поліпшується, з одного боку, ситуацією D (при однаковій собівартості прибуток вище), з іншого боку, ситуацією До (при однаковій прибутку собівартість нижча)

Всі можливі рішення про обсяги та видах продукції, що випускається, встановленому якості, зміні технології випуску та ін. В просторі критеріїв SOP зображуються точками, координати яких відповідно дорівнюють значенням обраних критеріїв.

Рішення, відповідне на рисунку 7.1 точці С, відноситься до розряду поліпшуються по обом зазначеним критеріям.

Всі рішення, відповідні частини KD кривої АВ, обмежує все безліч допустимих рішень, краще, ніж С, і є підмножиною Парето. Якщо є формальне вираження заданих критеріїв Р і 5, то легко отримати аналітичну залежність для кривої АВ, на множині точок якої і буде по додатковому критерієм відшукуватися рекомендований для виконання рішення. В іншому випадку безліч точок (рішень) виходить:

- статистичним шляхом в результаті спостереження минулого досвіду функціонування підприємства;
- на основі імітації діяльності, при «прокручуванні» сценаріїв розвитку за моделями;
- на основі експертного аналізу.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Системологія на транспорті. Дослідження операцій в транспортних системах : в 5 кн. / Е. В. Гаврилов, М. Ф. Дмитриченко, В. К. Доля та ін. ; [під ред. М. Ф. Дмитриченка]. – Київ : Знання України, 2008. – 360 с. – (кн. 5 / Гаврилов Е. В., Дмитриченко М. Ф., Доля В. К. та ін. ; кн. 3).
2. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций [пер. с англ.]. / Хемди А. Таха . – 7-е изд. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник. / Ю. П. Зайченко. – Київ : ВІПОЛ, 2000.
4. Мур Дж. Экономическое моделирование в Microsoft Excel. / Дж. Мур, Л. Уэдерфорд. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004.
5. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь / [Словарь современной экономической науки. Изд. 4-е, перераб. и доп.]. – Горький : Издательство «АВФ», 1996. – 704 с.
6. Четверухін Б. М. Дослідження операцій в транспортних системах : навч. посібник / Б. М. Четверухін, О. О. Бакуліч, С. Д. Радкевич. – Київ : НТУ, 2001. – 141 с. – Ч. 2 : Системи масового обслуговування.
7. Четверухін Б. М. Дослідження операцій в транспортних системах : навч. посіб. / Б. М. Четверухін. – Київ : УТУ, 2000. – 100 с. – Ч. 1 : Методи лінійного програмування та їх застосування.
8. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

Навчальне видання

ДАВІДІЧ Юрій Олександрович
САНЬКО Ярослав Володимирович
ФАЛЕЦЬКА Галина Іванівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

**«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА.
(ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ)»**

*(для студентів другого курсу всіх форм навчання
спеціальності 073 – Менеджмент)*

Відповідальний за випуск *В. К. Доля*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Г. І. Фалецька*

План 2017, поз. 143Л

Підп. до друку 26.04.2017. Формат 60×84 1/16

Друк на різнографі. Ум. друк. арк. 2,6

Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет
міського господарства імені О.М. Бекетова
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.